КОНСПЕКТ УРОКА ПО ТЕМЕ
«ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ»

ЦЕЛИ УРОКА:

1. Проверить понимание учащимися определения преобразования пространства;
2. Ввести определение движения пространства;
3. Доказать, что центральная симметрия пространства есть движение;
4. Сформулировать общие свойства движений, доказать некоторые из свойств;
5. Рассмотреть вопрос о неподвижных точках движения;
6. Решить типовые задачи по теме из задачника.

ТИП УРОКА: урок изучения нового материала

ВИД УРОКА: урок-лекция

ПЛАН УРОКА:

1. Проверочная работа по материалу предыдущего урока.
2. Постановка целей урока, организация хода урока.
3. Актуализация знаний.
4. Введение определения движение пространства.
5. Доказательство теоремы о том, что центральная симметрия есть движение.
6. Доказательство некоторых из общих свойств движений.
7. Рассмотрение вопроса о композиции движений.
8. Решение задачи на выяснение количества неподвижных точек движения. Решение типовых задач из задачника.
9. Подведение итогов урока.
10. Постановка домашнего задания.

ХОД УРОКА

I ЭТАП УРОКА.

- Здравствуйте, давайте вспомним, чем мы занимались на прошлом уроке?

- На прошлом уроке мы дали определение преобразования пространства, композиции преобразований и центральной симметрии, заполнили таблицу на определение, является ли соответствие, изображенное на рисунке отображением, сюръекцией, инъекцией, биекцией и, наконец, преобразованием пространства.

(Самостоятельная работа на 5 минут по материалу прошлого урока)

II ЭТАП УРОКА.

- Сегодня на уроке мы продолжим изучать тему «Преобразования пространства» и познакомимся с одним из его видов. Записываем тему сегодняшнего урока: «Движения пространства. Общие свойства движений».

Как вы думаете, какие вопросы должны быть рассмотрены на сегодняшнем уроке?

- Что такое движение пространства? Какими свойствами обладает движение? Каким образом применить полученные знания к решению задач?

(Учитель записывает вопросы на доске).

- Работу сегодня организуем таким образом: сначала я прочитаю вам лекцию по данной теме, затем попробуем применить теоретический материал к решению задач.

III ЭТАП УРОКА.

Понятие движения вам знакомо из курса планиметрии. Давайте вспомним, что же такое движение на плоскости.

- Движение плоскости – это преобразование плоскости, при котором сохраняются расстояния между точками.

- Попробуйте по аналогии сформулировать определение движения пространства.

- Движение пространства – это преобразование пространства, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками.

IV ЭТАП УРОКА

- Внимание! Даю определение: движение пространства – это преобразование пространства, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками.

- Скажите, какие ключевые слова в этом определении?

- *Ключевые слова: преобразование пространства; сохраняются расстояния.*

- Значит для того, чтобы выяснить, является ли данное соответствие движением, мы должны выяснить, является ли оно преобразованием пространства (а значит, отображением на себя, сюръекцией, инъекцией, биекцией) и сохраняет ли оно расстояния между любыми двумя точками.

Посмотрите на рис.1. Какое, уже известное вам, преобразование пространства изображено на нем?

- *Центральная симметрия.*

- Вспомним определение, что такое центральная симметрия.

- *Центральная симметрия – это преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно центра симметрии.*

- Как вы думаете, как изменяется расстояние между образами точек A и B при центральной симметрии?

- *Оно остается прежним.*

V ЭТАП УРОКА

- Итак, выдвигаем гипотезу: центральная симметрия сохраняет расстояния между точками. Попробуем доказать или опровергнуть нашу гипотезу.

Дано:

$A'=Z_0(A)$

$B'=Z_0(B)$

Доказать: $|A'B'|=|AB|$

- Доказательство будем проводить координатным методом. Рассмотрим центральную симметрию относительно начала координат (поместим центр симметрии в начало координат).

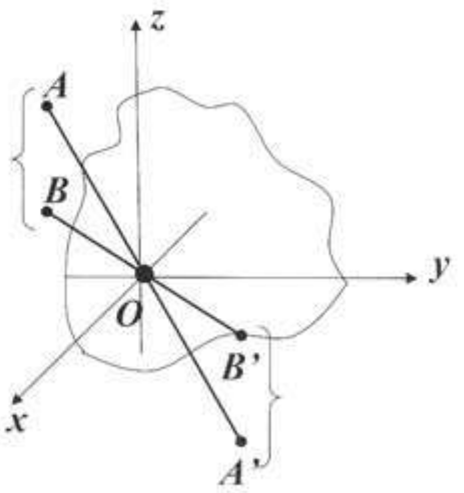


рис. 1

Итак, при центральной симметрии относительно координат две любые точки $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$ пространства отобразятся соответственно на точки $A'(-x_1, -y_1, -z_1)$ и $B'(-x_2, -y_2, -z_2)$ (доказывали на прошлом уроке).

Как найти расстояние между двумя точками, зная координаты этих точек?

- Расстояние между токами равно корню квадратному из суммы квадратов разности соответствующих координат.

- По формуле расстояния находим $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)}$,

$|A'B'| = \sqrt{(-x_2 + x_1) + (-y_2 + y_1) + (-z_2 + z_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)} = |AB|$.

Таким образом, мы доказали, что центральная симметрия сохраняет расстояние между точками.

Ответьте теперь на вопрос, является ли центральная симметрия движением пространства?

- Центральная симметрия есть движение пространства исходя из определения: является преобразованием пространства и сохраняет расстояние между любыми двумя точками.

VI ЭТАП УРОКА

- Рассмотрим вопрос о композиции движений пространства.

Докажем, что композиция двух движений пространства является движением.

Пусть g_1, g_2 - движения пространства и при движении g_1 точки A и B отображаются на точки $A_1 = g_1(A)$ и $B_1 = g_1(B)$, а при движении g_2 точки A_1 и B_1 отображаются на точки $A_2 = g_2(A_1)$ и $B_2 = g_2(B_1)$.

Что такое $g_2(A_1)$? Это $g_2(g_1(A))$, то есть композиция движений g_2 и g_1.

Что такое $g_2(B_1)$? Это $g_2(g_1(B))$, то есть композиция движений g_2 и g_1.

$$(g_2 \circ g_1)(A) = g_2(g_1(A)) = g_2(A_1) = A_2,$$
$$(g_2 \circ g_1)(B) = g_2(g_1(B)) = g_2(B_1) = B_2$$

По определению движения $|A_1B_1| = |AB|$ и $|A_2B_2| = |A_1B_1|$. Тогда имеем

$|A_2B_2| = |AB|$ в силу транзитивности отношения равенства.

Это означает, что композиция движений сохраняет расстояние между точками, поэтому является движением.

На полях подписываем: домашняя самостоятельная работа (доказать, что тождественное преобразование и преобразование, обратное движению, являются движениями).

VII ЭТАП УРОКА

- Рассмотрим теперь общие свойства движений.

Лемма. При движении три точки, лежащие на одной прямой отображаются на три точки, лежащие на одной прямой, причем точка, лежащая между двумя другими, отображается на точку, лежащую между образами двух других точек.

Дано: A, B, C $\in$ ***a***

A'=g(A)

B'=g(B)

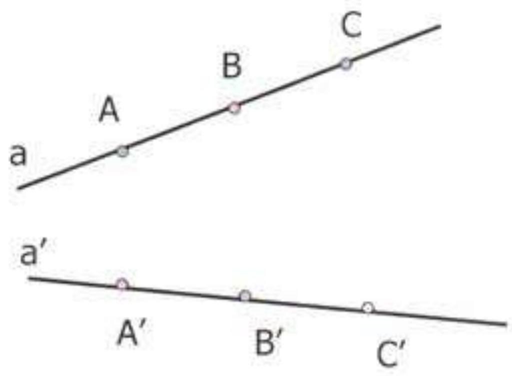
C'=g(C)

Доказать: A', B', C' $\in$ b

Какое условие выполняется, если известно, что три точки лежат на одной прямой?

- *Значит, одна из точек лежит между двумя другими.*

Пусть точка B лежит между точками A и C.



Это означает, что выполняется равенство $|AB|+|BC|=|AC|$. (*)

Так как при движении расстояния между точками сохраняются, то справедливы равенства $|A'B'|=|AB|$, $|B'C'|=|BC|$, $|A'C'|=|AC|$. На основании этих равенств и равенства (*) получим равенство $|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$. А это и означает, что три точки лежат на одной прямой, причем точка B' лежит между точками A' и C'. Лемма доказана.

Общие свойства движений выражает следующая теорема.

Теорема. Движение пространства отображает:

а) отрезок на равный ему отрезок;

б) прямую на прямую;

в) луч на луч;

г) треугольник на равный ему треугольник;

д) плоскость на плоскость;

е) полуплоскость на полуплоскость;

ж) тетраэдр на равный ему тетраэдр;

з) полупространство на полупространство.

а) Пусть AB – данный отрезок. $A'=g(A)$, $B'=g(B)$ – образы концов данного отрезка.

Докажем, что каждая точка отрезка AB при движении g отображается на некоторую точку отрезка A'B' и, обратно, каждая точка отрезка A'B' имеет своим прообразом при движении g некоторую точку отрезка AB.

По лемме любая точка отрезка AB отображается на точку отрезка A'B' единственным образом.

Пусть P' – произвольная точка отрезка A'B', т.е. |A'P'|+|P'B'|=|A'B'|. Так как g – движение, то преобразование пространства, а следовательно, биекция. Значит, $\forall P' \exists ! P : |AP| = |A'P'|, |PB| = |P'B'|$. Учитывая, что |A'B'|=|AB|, получаем |AP|+|PB|=|AB|.

Свойство а) доказано.

Докажем, что движение отображает треугольник на равный ему треугольник (свойство г).

Дано:

ΔABC

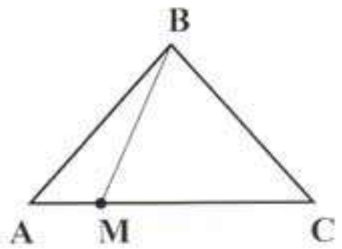
A'=g(A)

B'=g(B)

C'=g(C)

Доказать: g(ΔABC)=ΔA'B'C'

ΔABC= ΔA'B'C'

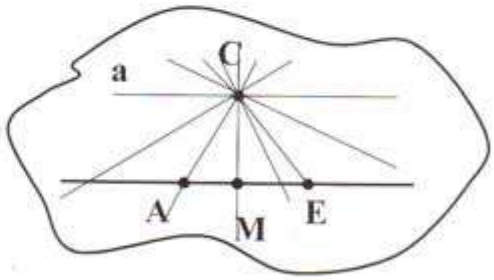


При движении g три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, отображаются соответственно на точки A', B', C', не лежащие на одной прямой, так что |A'B'|=|AB|, |B'C'|=|BC|, |C'A'|=|CA|, то есть точки A'B'C' являются вершинами треугольника ABC. При этом, когда точка M, принадлежащая стороне AC «пробежит» весь отрезок AC, ее образ - точка M' «пробежит» отрезок A'C', равный отрезку AC, а отрезок B'M' «заметет» внутренность треугольника A'B'C', равного треугольнику ABC.

Свойство г) доказано.

Докажем, что при движении плоскость отображается на плоскость.

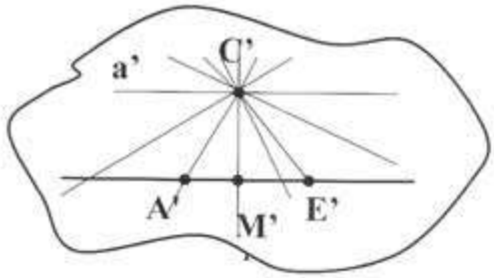
Выберем в данной плоскости α три точки A, E, C, не лежащие на одной прямой. при движении g они отображаются на точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Через три точки, не лежащих на одной прямой, проходит единственная плоскость. Обозначим ее α' и докажем, что $g(\alpha)= \alpha'$.



Плоскость α является объединением всех прямых плоскости, проходящих через точку C (объединением всех прямых пучка с центром в точке C). Этот пучок образован прямой a, параллельной прямой AE, и всеми прямыми CM, где M – любая точка прямой AE.

- Что является образом прямой a при отображении g ?

- *Образом прямой a при движении g является прямая a', проходящая через точку C', параллельно прямой A'E'.*



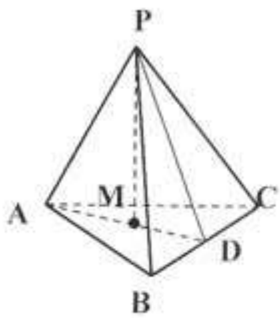
Когда точка M «пробежит» прямую AE, прямые CM (в объединении с прямой a) «заметут» всю плоскость α,

Что произойдет в это время с их образами?

- *Образ точки M – M' «пробежит» прямую A'E', а прямые C'M' – образы прямых CM – в объединении с прямой a' «заметут»всю плоскость α'.*

Делаем вывод. Так как каждая прямая пучка CM отображается на свой образ биективно, то α' – образ плоскости α при отображении g.

Докажем, что образом тетраэдра при движении является тетраэдр.



При движении g вершины тетраэдра PABC отобразятся на некоторые точки P'=g(P), A'=g(A), B'=g(B), C'=g(C), не лежащие в одной плоскости, причем выполняются равенства |A'B'|=|AB|, |B'C'|=|BC|, | C'A'|=|CA|, |P'A'|=|PA|, |P'B'|=|PB|, |P'C'|=|PC|, то есть точки P', A', B', C' являются вершинами тетраэдра, ребра которого равны ребрам данного тетраэдра PABC.

Когда точка М «заметет» ΔABC, что отрезок PM «заметет» тетраэдр PABC.

- Что произойдет в это время с их образами?

- При этом точка М' – образ точки М - «заметет» ΔA'B'C', а отрезок P'M'- тетраэдр P'A'B'C', равный тетраэдру PABC.

Сделайте вывод.

- Так как отрезок PM отображается на свой образ биективно, то образом тетраэдра PABC при движении g является равный ему тетраэдр P'A'B'C'.

- На этом теоретический материал сегодняшнего урока закончился. Попробуем применить полученные знания к решению задач.

VIII ЭТАП УРОКА

№1. При преобразовании g точки A(1, 2, -1), B(1,-6,5), C(1, 12, -1)

отобразились на точки а) A'(4, 0, 1), B'(-4, 6, 1), C'(14, 0, 1);

б) A'(-1, -2, 1), B(-1,6,-5), C(-1, -12, 1)

Является ли преобразование g движением?

- Итак, что известно по условию задачи?
- *Координаты точек и их образов при преобразовании g.*
- Что в задаче требуется найти?
- *Требуется выяснить, является ли указанное преобразование движением.*
- Когда ответ на вопрос задачи будет положительным?
- *Если преобразование g сохраняет расстояние между точками.*
- То есть если расстояние между точками будет равно расстояния между их образами.
- Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
- *По формуле расстояния между двумя точками – корень квадратный из разности соответствующих координат.(Двое учащихся решают задание у доски, остальные – в тетрадях).*

а)

$$|AB| = \sqrt{(1-1)^2 + (2+6)^2 + (-1-5)^2} = 10$$

$$|AC| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-12)^2 + (-1+1)^2} = 10$$

$|BC| = \sqrt{(1-1)^2 + (12+6)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

$|A'B'| = \sqrt{(-4-4)^2 + (6-0)^2 + (1-1)^2} = 10$

$|A'C'| = \sqrt{(14-4)^2 + (0-0)^2 + (1-1)^2} = 10$

$|B'C'| = \sqrt{(14+4)^2 + (0-6)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

|A'B'|=|AB|, |B'C'|=|BC|, |A'C'|=|AC| $\Rightarrow$g- движение.

б)

$|AB| = \sqrt{(1-1)^2 + (2+6)^2 + (-1-5)^2} = 10$

$|AC| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-12)^2 + (-1+1)^2} = 10$

$|BC| = \sqrt{(1-1)^2 + (12+6)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

$|A'B'| = \sqrt{(-1+1)^2 + (6+2)^2 + (-5-1)^2} = 10$

$|A'C'| = \sqrt{(-1+1)^2 + (-12+2)^2 + (1-1)^2} = 10$

$|B'C'| = \sqrt{(-1+1)^2 + (6+12)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

|A'B'|=|AB|, |B'C'|=|BC|, |A'C'|=|AC| $\Rightarrow$g- движение.

- Определите вид ΔABC и ΔA'B'C' в задании под буквой а).

- *ΔABC и ΔA'B'C' – равнобедренные.*

- Может ли такое быть: при движении g равнобедренный треугольник отобразился на равносторонний треугольник?

- *Нет, по свойству движений, движение отображает треугольник на равный ему треугольник.*

- Определите вид движения в задании под буквой б).

- *Данное движение представляет собой центральную симметрию относительно начала координат.*

- Скажите, центральная симметрия имеет неподвижные точки?

- *Да, центральная симметрия имеет одну неподвижную точку – центр симметрии.*

- А как вы думаете, может ли движение иметь две неподвижные точки?

- (*Высказывают свои предположения*).

- Вопрос вызывает споры. Давайте предположим, что существует движение, которое имеет ровно две неподвижные точки A и B. Через две точки проходит единственная прямая AB. По доказанной на сегодняшнем уроке лемме при движении прямая отображается на прямую, причем точка, лежащая между точками A и B (например, середина отрезка AB – точка C) отображается на точку, лежащую между образами точек A и B. Так как движение сохраняет расстояния, то середина отрезка (точка C) остается неподвижной, то есть появляется третья неподвижная точка. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает, что движение пространства две неподвижные точки иметь не может.
- Теперь предположим, что движение g имеет одну неподвижную точку. Имеет ли неподвижную точку движение g^{-1}?
- Пусть A – неподвижная точка движения g, то есть g(A)=A. Но отсюда следует, что $g^{-1}(A)=A$, а это означает A – неподвижная точка преобразования g^{-1}.
- Имеет ли неподвижную точку композиция преобразований $g \circ g^{-1}$?
- *Да, так как композиция преобразования и обратного ему преобразования есть тождественное преобразование, которое каждую точку пространства отображает на себя (оставляет неподвижной).*
- Имеет ли неподвижную точку композиция преобразований $g^{-1} \circ g^{-1}$?
- $g^{-1} \circ g^{-1}(a) = g^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$. *По доказанному:* $g^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = g^{-1}(A) = A$.

  Следовательно, преобразование $g^{-1} \circ g^{-1}$ *имеет неподвижную точку.*

Решим № 1.029. (i, j, k)- ортонормированный базис пространства. При движении g векторы i и j отображаются соответственно на векторы j и $-i$. На какой вектор отобразится вектор k при этом движении?

Ясно, что при движении длины векторов и, следовательно, углы между векторами (их можно выразить через сохранившиеся длины векторов) сохраняются. Пусть k $(k_1, k_2\ k_3)$ – координаты вектора k'. Так как движение сохраняет углы, то $\cos(i,k) = \cos(i',k') = \cos(j,k')$ и $\cos(j,k) = \cos(j',k') = \cos(-i,k')$, где i', j', k' – образы векторов i, j, k соответственно.

- Какие координаты имеют векторы i, j, k ортонормированного базиса? Чему равны длины этих векторов? Каковы углы между этими векторами?

- $i(1, 0, 0)$, $j(0, 1, 0)$, $k(0, 0, 1)$. *Длина каждого из этих векторов равна единице. Углы между векторами равны* 90°.

- Значит, косинусы углов равны нулю.

Выразим в координатной форме косинус угла между вектором k' и вектором $i'=j$.

$\cos(i,k)=\cos(i',k')=\cos(j,k')=k_2=0$.

Выразим в координатной форме косинус угла между вектором k' и вектором $j'=-i$.

$\cos(j,k)=\cos(j',k')=\cos(-i,k')=-k_1=0$.

Так как движение сохраняет длины векторов, то длина вектора k' будет равна единице. Выразим длину вектора k' через его координаты.

$|k'|=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}=\sqrt{0+0+k_3^2}=|k_3|=1\Rightarrow k_3=\pm1$. Следовательно, вектор k' отобразится на вектор k или $-k$.

IX ЭТАП УРОКА

- Итак, подведем итоги. Что нового вы узнали на сегодняшнем уроке?

- *Мы узнали, что преобразование пространства, сохраняющее расстояния между любыми двумя точками, называется движением пространства.*

- *Мы доказали, что центральная симметрия есть движение пространства.*

- *Мы изучили общие свойства движений.*

- Какие свойства вы помните?

- *При движении отрезок отображается на равный ему отрезок, прямая – на прямую, треугольник – на равный ему треугольник, тетраэдр – на равный ему тетраэдр.*

- *При движении луч отображается на луч, плоскость на плоскость, полуплоскость на полуплоскость, полупространство на полупространство.*

- Что вы узнали о неподвижных точках движения?

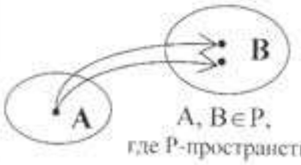
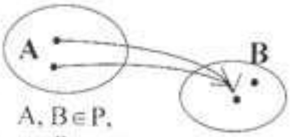
- *Движение может иметь одну неподвижную точку (центральная симметрия), но не может иметь две неподвижные точки.*

X ЭТАП УРОКА

- На следующем уроке мы продолжим с вами изучать движения. А сейчас записываем домашнее задание: §3, пп. 3.1, 3.2. (выучить определения, свойства, разобрать доказательства). Разобрать и законспектировать доказательство свойства движения: движение пространства отображает прямую на прямую (с.18). Доказать, что тождественное преобразование и преобразование, обратное движению, являются движениями. №№ 1.021, 1.023, 1.024, 1.028, 1.030.

Материал для самостоятельной работы в начале урока.

Вариант I. Заполни таблицу.

Изображение	**отображение**	**сюръекция**	**инъекция**	**биекция**	**преобразование пространства**
 A, B∈P, где P-пространство					
 A, B∈P, где P-пространство					
	+	-	+	-	
					+